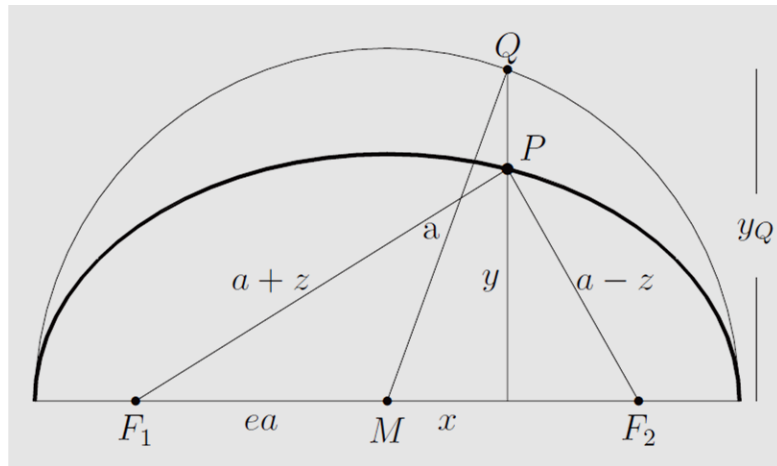


Újra az ellipszis egyenleteiről

Már sokszor elővettük az ellipszist, annak egyenleteit is. Azért foglalkozunk vele ismét, mert egy szép levezetéssel találkoztunk az [1] forrás anyagában. Most erről lesz szó. Először tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra – forrása: [1]

Itt az ellipszis „kertész - szerkesztés” - éhez (is) kapcsolódó mennyiségeket tüntették fel. Jelölések:

~ a : az ellipszis *nagykörének* / *főkörének* sugara;

~ e : az ellipszis *numerikus excentricitása* – ld. pl.: [2]!;

~ Q : a nagykör egy pontja, mely egy függőlegesen található az ellipszis P pontjával;

~ x, y : a P ellipszispont koordinátái az M kezdőpontú derékszögű k. r. - ben;

~ z : az F_1 és F_2 fókuszpontokból a P ellipszisponthoz húzott sugarak hosszának megváltozása a legmagasabban fekvő ellipszisponthoz tartozó sugárhosszhoz képest, ami a .

Utóbbi adódik az ellipszis

$$\boxed{r_1 + r_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot a} \quad (1)$$

definíciós egyenletéből, hiszen az

$$r_1 = a + z, \quad r_2 = a - z \quad (2)$$

mennyiségek azonosan kielégítik az (1) egyenletet.

Az 1. ábra derékszögű háromszögeiből *Pitagorász* tételével:

$$y^2 = (a + z)^2 - (e \cdot a + x)^2, \quad (3)$$

$$y^2 = (a - z)^2 - (e \cdot a - x)^2. \quad (4)$$

Most (3) és (4) különbségével:

$$\begin{aligned} (a+z)^2 - (e \cdot a + x)^2 - [(a-z)^2 - (e \cdot a - x)^2] &= 0 \rightarrow \\ (a+z)^2 - (a-z)^2 &= (e \cdot a + x)^2 - (e \cdot a - x)^2 \rightarrow \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot z + z^2 - (a^2 - 2 \cdot a \cdot z + z^2) &= e^2 \cdot a^2 + 2 \cdot e \cdot a \cdot x + x^2 - (e^2 \cdot a^2 - 2 \cdot e \cdot a \cdot x + x^2) \rightarrow \\ 4 \cdot a \cdot z &= 4 \cdot e \cdot a \cdot x \rightarrow z = e \cdot x, \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{z = e \cdot x}, \quad e = \frac{c}{a}. \quad (5)$$

Itt $c = F_1M = MF_2$ a *lineáris excentricitás* – ld. pl.: [2]!

Majd pl. (3) és (5) - tel:

$$\begin{aligned} y^2 &= (a + e \cdot x)^2 - (e \cdot a + x)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + e^2 \cdot x^2 - (e^2 \cdot a^2 + 2 \cdot e \cdot a \cdot x + x^2), \\ y^2 &= a^2 \cdot (1 - e^2) - x^2 \cdot (1 - e^2) = a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad \text{tehát:} \\ y^2 &= a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Bevezetve a

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) \rightarrow \underline{b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}} \quad (7)$$

szerinti újabb állandót, (6) és (7) - tel:

$$y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}, \quad (8)$$

vagyis az ellipszis *kanonikus egyenletét* kaptuk.

(8) - at átírva, az 1. ábrával is:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = b^2 \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2} \cdot y_Q^2 \rightarrow y = \frac{b}{a} \cdot y_Q \rightarrow y \equiv y_P \rightarrow \\ \underline{y_P} &= \frac{b}{a} \cdot y_Q, \end{aligned} \quad (9)$$

vagyis (9) azt mondja, hogy az ellipszis **P** pontja a kör **Q** pontjából **b / a** arányú zsugorítással áll elő, hiszen (7) szerint általában $b < a \rightarrow b / a < 1$. (A zsugorítás csak az **y** - koordinátára vonatkozik.) A (9) képletben nem tettük ki a $\pm$ előjelet, mert **y_P** előjele ugyanaz, mint **y_Q** - é.

Megjegyzések:

M1. Az első „meglepetés” számunkra a z mennyiség bevonása volt.

M2. A szokásos középiskolai tananyag része a (8) kanonikus egyenlet levezetése. Utóbbi, mely szintén (1) - en alapul, szerintünk hosszabb – és némiképpen problémásabb –, mint az itteni. Erről azonnal meg lehet győződni [2] fellapozásával. Ezért is vettük elő az [1] munkában látottakat. Szóval, az itteni levezetés nekünk jobban tetszik.

M3. Az [1] anyagban még több más érdekes dolog is található, főként *égi mechanikai* vonatkozásokkal. Utóbbiak egy része még mindig beleférhet a középiskolai ismeretek körébe.

M4. A (2) és (5) egyenletekből megtudtuk, hogy

$$z = r_1 - a = a - r_2 = e \cdot x = \frac{c}{a} \cdot x, \quad (10)$$

vagyis a középhelyzethez képesti sugárkülönbség arányos a középhelyzettől mért vízszintes eltérés előjeles nagyságával. Egy további, akár hasznosnak is bizonyulható összefüggés (2) és (10) szerint:

$$r_1 - r_2 = a + z - (a - z) = 2 \cdot z = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot x, \quad (11)$$

innen:

$$\underline{x(r_1, r_2) \equiv x_P = \frac{a}{c} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}}; \quad (12)$$

vagyis: ha tudjuk, hogy a P pont az (a, c) paraméterekkel bíró ellipszispályán mozog, akkor a pont helyének x - koordinátája (12) szerint számítható, távmérések eredményei -ből. Ezután a pont helye y - koordinátájának abszolút értéke (8) -ból számítható, de e koordináta előjelét még tisztázni kell, egyéb információk – pl.: megfigyelések – alapján. Ugyanis (8) szerint, (12) - vel is:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \rightarrow y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{\left[\frac{a}{c} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}\right]^2}{a^2}} \rightarrow \\ \underline{y(r_1, r_2) &= \pm b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \cdot c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (13 / 1)$$

Most, (7) és (13 / 1) - gyel is:

$$y(r_1, r_2) = \pm \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \cdot c}\right)^2} = \pm \sqrt{(a^2 - c^2) \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \cdot c}\right)^2\right]} =$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \sqrt{(a^2 - c^2) \cdot \left[\frac{c^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2}{c^2} \right]} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2} \cdot \left[c^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right]} = \\
&= \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} - 1 \right) \cdot \left[c^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right]},
\end{aligned}$$

tehát:

$$y(r_1, r_2) \equiv y_P = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} - 1 \right) \cdot \left[c^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right)^2 \right]}. \quad (13 / 2)$$

Az (5 / 1), (12), (13) képletekkel eddig még nem találkoztunk.

M5. A (2) és (5) képletekkel:

$$r_1 = a + e \cdot x = a + \frac{c}{a} \cdot x, \quad r_2 = a - e \cdot x = a - \frac{c}{a} \cdot x. \quad (14)$$

Ezekkel már könnyebben lehet találkozni *analitikus geometriai* könyvekben – [3].

Például:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = \\
&= \sqrt{x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} = \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) + 2 \cdot c \cdot x + (c^2 + b^2)} = \\
&= \sqrt{x^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2 \cdot c \cdot x + a^2} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} + 2 \cdot c \cdot x + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a} \cdot x \right)^2} = \\
&= \left| a + \frac{c}{a} \cdot x \right| = a + \frac{c}{a} \cdot x, \text{ menet közben felhasználva, hogy } a^2 = c^2 + b^2;
\end{aligned}$$

tehát:

$$r_1 = a + \frac{c}{a} \cdot x; \quad (14 / 1)$$

hasonlóan eljárva:

$$r_2 = a - \frac{c}{a} \cdot x. \quad (14 / 2)$$

Javasoljuk, hogy a (14) képletekben az abszolútérték jele elhagyásának jogosságát, illetve (14 / 2) levezetését az érdeklődő Olvasó önállóan gondolja végig, illetve végezze el!

Megemlítjük, hogy [3] - ban a – jel helyett a $\Leftrightarrow$ jel jelenik meg (nálunk) a képernyőn.

M6. Az (5) képlet után írtuk, hogy „Majd pl. (3) és (5) - tel:” ; ez azt jelenti, hogy (4) és (5) - tel ugyanilyen jó lett volna a folytatás.

M7. A fenti „kertész - szerkesztés” megnevezés a német „Gärtner - Konstruktion” kifejezés tükörfordítása. Utóbbit [1] - ben is használják. E szerkesztésről részletesen beszámoltunk egy régebbi írásunkban, melynek címe: *Ellipszis rajzolásához*. Amúgy pedig ez is középiskolai tananyag. E régebbi dolgozatunkban kicsit segítettünk a kertészkedésben.

Források:

[1] – <http://www.astronomie-und-internet.de/docs/eigeneDokumente/HimmelsmechanikSS2005.pdf>

[2] – **Obádovics J. Gyula:** Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[3] – **Троицкий Е.В.:** Аналитическая геометрия. 1999.djvu - [682,801 байт](#)

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2021. 07. 19.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>